DIMENSI MATRIK DAN DIMENSI PARTISI PADA GRAF HASIL OPERASI KORONA $K_n \odot K_{n-1}, n \geq 3$

Yuni Listiana
FKIP, Universitas Dr. Soetomo Surabaya

***Abstract**: Let$G(V, E)$is a connected graph.For an ordered set $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ of vertices, $W \subseteq V(G)$, and a vertex $v \in V(G)$, the representation of v with respect to W is the ordered k-tuple $r(v|W) = \{d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k)|\forall v \in V(G)\}$. The set W is called a resolving set of G if every vertex of G has a distinct representation. A resolving set containing a minimum number of vertices is called a basis for G. The metric dimension of G, denoted by $dim(G)$, is the number of vertices in a basis of G. Then, for a subset S of V(G), the distance between u and S is $d(v, S) = min\{d(v, x)|\forall x \in S, \forall v \in V(G)\}$. Let $\prod = (S_1, S_2, \dots, S_l)$be an ordered l-partition of V(G), for$\forall S_l \subset V(G)$ dan$v \in V(G)$, the representation of v with respect to $\prod$ is the l-vector $r(v|\prod) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_l))$. The set $\prod$ is called a resolving partition for G if the l -vector $r(v|\prod), \forall v \in V(G)$are distinct. The minimum l for which there is a resolving l-partition of V(G) is the partition dimension of G, denoted by $pd(G)$. In this paper, we determine the metric dimension and the partition dimension of corona product graphs $K_n \odot K_{n-1}$, and we get some result that the metric dimension and partition dimension of $K_n \odot K_{n-1}$respectively is$n(n-2)$ and $2n-1$, for$n \geq 3$.*

***Keyword**: Metric dimention, partition dimenstion,corona product graphs*

Pendahuluan

Graf Gdapat didenisikan sebagai pasangan himpunan $(V(G), E(G))$, dengan$V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dari elemen yang disebut vertex, dan $E(G)$adalah himpunan (boleh kosong) dari elemen yang disebut sisi, selanjutnya untuk mempermudah pemakaian maka $V(G)$ dan $E(G)$disingkat V dan G. Dalampaper ini, semua graf yang digunakan adalah berhingga, tidak berarah, dan sederhana.

Dimensi metrik pertama kali dikenalkan oleh Harary dan Melter pada tahun 1966, kajian tentang dimensi metrik menjadi sebuah complate problem artinya tidak mudah untuk mendapatkan dimensi metrik dari suatu graf bentuk tertentu. Oleh karenanya untuk mendapatkan dimensi metrik bentuk graf tertentu ataupun kelas tertentu dilakukan analisis dari subkelas terlebih dahulu agar lebih mudah mencari dimensi metrik dari graf secara umum [1]. Sedangkan dimensi partisi dari graf pertama kali dipelajari oleh Chartrand et. al. yang kemudian dikuti oleh Chappel et. al [2].

Menemukan hubungan (dalam bentuk dimensi matrik dan dimensi partisi) antara graf asal dan graf yang dihasilkan dari beberapa operasi graf merupakan topik yang menarik untuk dipertimbangkan. Pada tahun 2010, Yero et. al. dalam [6] telah meneliti beberapa hubungan dari dimensi metrik pada graf hasil korona dengan graf asalnya. Selanjutnya, tahun

2011 Iswadi, Baskoro dan Simanjuntak [5] juga melakukan hal serupa untuk kasus yang lebih umum. Iswadi menunjukkan bahwa untuk sembarang pasangan Gdan H, $|H| \leq 2$, maka $dim(G⊙H)$ = (G|dim (H), jika H mengandung vertex dominan. Untuk kasus partisi dimensi, Baskoro dan Darmaji [2] tahun 2011 juga telah melakukan penelitian pada dimensi partisi dari graf-graf hasil operasi korona. Mereka menunjukkan bahwauntuk semua pasangan graf terhubung G dan H, $pd(G⊙H) \leq pd(G) + pd(H)$jika diameter dari H paling besar 2.

Dikarenakan dari beberapa hasil penelitian sebelumnya belum ada yang membahas tentang dimensi metrik dan dimensi partisi pada graf hasil operasi korona antar graf lengkap, maka dalam paper ini saya akan menganalisis dimensi metrik dan dimensi partisi pada graf hasil operasi korona $K_n⊙K_{n-1}$.

Graf Hasil Operasi Korona

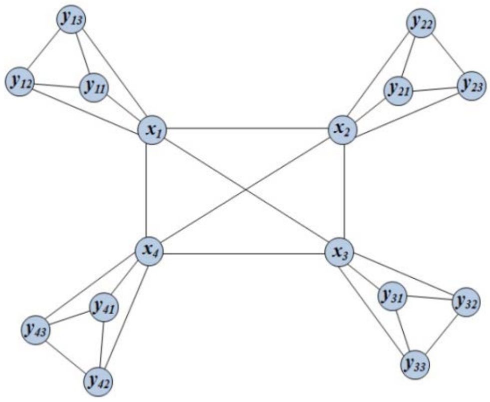
Misalkan G adalah graf terhubung dengan order n dan H (tidak harus terhubung)adalah graf dengan $|H| \geq 2$. Sebuah graf G korona H, $G⊙H$, didefinisikan sebagai graf yang dibentuk dengan mengambil n salinan (copies) graf $H_1, H_2, \dots, H_n$dari graf H dan menghubungkan vertex ke$-i$ dari G dengan vertex-vertex padaH_i. Seluruh pembahasan pada bab ini, mengacu pada graf H_i sebagai Salinanke$-i$ dari H yang terhubung pada vertex ke$-i$ dari G pada $G⊙H$ untuk setiap$i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Graf hasil korona $K_n⊙K_{n-1}$ merupakan graf hasil korona antara graf lengkap(K_n),$|K_n| = n$ dan dinotasikan $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dengan graf lengkap (K_{n-1}),$|K_{n-1}| = n$-1 dan dinotasikan $\{y_1, y_2, \dots, y_{i(n-1)}\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, dimana $n \geq 3$bilangan bulat positif. Graf hasil korona $K_n⊙K_{n-1}$ adalah $G(V, E)$ dengan orderdan size sebagai berikut:

$$V(K_n⊙K_{n-1}) = n + n(n-1) = n^2$$

$$E(K_n⊙K_{n-1}) = \binom{n}{2} + n\binom{n-1}{2} + n(n-1)$$
$$= \frac{(n^2+2)(n-1)}{2}$$

Sebagai contoh untuk $n = 4$, graf hasil korona $K_4⊙K_3$ dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar Graf $K_4⊙K_3$

Iswadi dkk [5] memperluas ide dari kesamaan jarak. Misalkan G adalah grafterhubung. Dua vertex u dan v dalam subgraf H dari G dikatakan 'berjarak samaterhadap H' jika $d(u, x) = d(v, x)$ untuk semua $x \in V(G) - V(H)$. Sehingga akibat dari kondisi tersebut muncul fakta sebagai berikut untuk graf $G \odot H$.

Fakta: *Misalkan $G \odot H$adalah graf hasil korona antara graf terhubung$G$dengan$H$, dimana $V(H) \geq 2$. Maka dua vertex $u, v \in H_i$ berjarak sama terhadap H_i.*

Iswadi [5] juga mengungkap sifat jarak dari dua vertex x dan y dalam H atauH_i subgraf dari $G \odot H$. Sebuah vertex $u \in G$ dikatakan dominan vertex jika$d(u, v) = 1$untuk vertex-vertex lainnya dalam G atau $(v \in G)$.

Dimensi Metrik Graf Operasi Korona $\boldsymbol{K_n \odot K_{n-1}}$

Untuk menentukan dimensi metrik graf korona $K_n \odot K_{n-1}$ dapat dilakukan pencarian batas atas dan bawah dari dimensi metrik pada graf korona $K_n \odot K_{n-1}$.Batas bawah dari dimensi metrik pada $K_n \odot K_{n-1}$ dapat ditemukan melalui lemma sebagai berikut:

Lemma: *Untuk setiap graf $K_n \odot K_{n-1}, n \geq 3$, sedikitnya $(n-2)$ simpulpada setiap simpul salinan ke$-n$ dari K_{n-1} pasti merupakan himpunan himpunanpembeda W.*

Dari Lemma di ats diperoleh batas bawah sedikitnya $(n-2)$ simpul pada setiap simpul salinan K_{n-1} merupakan himpunan pembeda. Oleh karena graf $K_n \odot K_{n-1}$, memiliki n salinan K_{n-1} yang terhubung masing-masing pada setiap vertex dari $K_n$maka jelas bahwa batas bawah $dim(K_n \odot K_{n-1}) \geq n(n-2)$. Untuk menemukanbatas atas dimensi metrik graf $K_n \odot K_{n-1}$ dapat dilakukan melalui konstruksi, misalkan diambil himpunan pembeda

$$W = \{y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1(n-2)}, y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2(n-2)}, \dots, y_{n(n-1)}\}$$

, maka diperoleh representasi terhadap W sebagai berikut:

$$r(y_{1(n-1)}|W) = (1, 1, \dots, 1, 3, 3, \dots, 3, \dots, 3)$$

$$r(y_{2(n-1)}|W) = (3, 3, \dots, 3, 1, 1, \dots, 1, \dots, 3)$$

$$\vdots$$

$$r(y_{n(n-1)}|W) = (3,3, \dots, 3, 3, 3, \dots, 3, \dots,1)$$

$$r(x_1|W) = (1, 1, \dots, 1, 2, 2, \dots, 2, \dots,2)$$

$$r(x_2|W) = (2, 2, \dots, 2, 1, 1, \dots, 1, \dots, 2)$$

$$\vdots$$

$$r(x_n|W) = (2, 2, \dots, 2, 2, 2, \dots, 2, \dots, 1)$$

Dapat dilihat bahwa setiap simpul memiliki representasi yang berbeda terhadap$W$, dengan demikian batas atas $dim(K_n \odot K_{n-1}) \leq n(n-2)$.

Teorema: *Jika graf G adalah $K_n \odot K_{n-1}$, dengan $n \geq 3$ maka dimensi metrik dari G adalah $dim(G) = n(n-2)$.*

Bukti. Dengan menggunakan Lemma 3.1, yaitu paling sedikit $(n-2)$ simpuldari n salinan graf K_{n-1} pada $K_n \odot K_{n-1}$yang merupakan himpunan pembeda. Karena $K_n$mempunyai vertex sebanyak n, maka jelas bahwa batas bawah$dim(K_n \odot K_{n-1}) \leq n(n-2)$.

Sedangkan pada konstruksi sebelumnya diperoleh representasi yang berbeda pada setiap himpunan vertex terhadap himpunanpembeda, dengan demikian batas atas $dim(K_n \odot K_{n-1}) \leq n(n-2)$. Oleh karenabatas atas dan batas bawah sama, maka $dim(K_n \odot K_{n-1}) = n(n-2)$.

Dalam paper ini, sengaja tidak dibahas mengenai dimensi metrik dari graf $K_n \odot K_{n-1}$ untuk $n < 3$. Hal ini dikarenakan untuk $n = 2, K_2 \odot K_1$ isomorfis dengan P_4 sehingga$dim(K_2 \odot K_1) = dim(P4) = 1$. Sedangkan untuk $n = 1$, $K_1 \odot K_0$ merupakan graf *trivial*.

Jika dibandingkan dengan hasil penelitian sebelumnya oleh Iswadi dkk. [5], dengan teorema berikut:

Teorema: *Misalkan G adalah graf terhubung, H adalah graf dengan orderminimal 2. Maka,*

$$dim(G \odot H) =$$

$$|G|\, dim(H) \;\; Jika\ H\ memuat\ dominan\ vertex$$
$$|G|\, dim(H)\ |G|\, dim(K_1 + H)\ , \quad lainnya$$

Bukti: Karena graf lengkap K_n dan K_{n-1} adalah graf yang memuat dominan vertex,maka dari Teorema 3.2 akan didapat corollarry (akibat) sebagai berikut:

Akibat: *Jika graf G adalah K_n dan H adalah K_{n-1}, maka dimensi metrikdari graf $G \odot H$ adalah:*

$$\begin{aligned} dim(G \odot H) &= |G|(|H| - 1) \\ &= n\big((n-1) - 1\big) \\ &= n(n-2) \end{aligned}$$

Sehingga Akibat 3.1 sesuai dengan Teorema di atas yang telah dibuktikan sebelumnya.

Dari Teorema dan Akibat didapat Akibat berikutnya yang dapat digunakansebagai bentuk umum dari dimensi metrik pada graf hasil korona graf komplit$K_m \odot K_n$, dengan $m, n \geq 2$.

Akibat: *Jika graf G adalah K_m, $m \geq 2$, dan graf H adalah K_n, $n \geq 2$. Makadimensi metrik dari $K_m \odot K_n$ adalah:*

$$dim(K_m \odot K_n) = m(n-1)$$

Dimensi Partisi Graf Operasi Korona $K_n \odot K_{n-1}$

Dalam bab ini, akan dibahas mengenai dimensi partisi dari graf hasil operasikorona pada dua graf lengkap K_n dengan K_{n-1}, $K_n \odot K_{n-1}$, $n \geq 3$ bilangan bulatpositif. Dimensi Partisi pada graf$K_n \odot K_{n-1}$ didapat melalui kardinalitasminimum dari himpunan partisi pembeda dari graf $K_n \odot K_{n-1}$.

Lemma berikut dapat digunakan dalam menentukan batas bawah dari dimensi partisi pada graf operasi korona $K_n \odot K_{n-1}$.

Lemma: Misalkan G adalah graf terhubung non trivial. Misalkan$\prod$adalah himpunan partisi pembeda untuk G dan $u, v \in V(G)$. Jika $d(u, w) = d(v, w)$untuk semua $w \in V(G) - u, v$, maka u dan v berada pada himpunan yang berbedadi dalam$\prod$.

Misalkan graf G adalah K_n dan graf H adalah K_{n-1}, $n \geq 3$, dengan

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$adalah himpunan vertex dari K_n.$\prod = \{S_1, S_2, \dots, S_l\}$ adalah himpunan partisipembeda dari $G \odot H$. Misalkan H_i adalah n salinan dari K_{n-1}, $i = 1, 2, \dots, n$.Karena setiap dua vertex $u, v \in V(K_{n-1})$ memiliki jarak yang sama, maka dengan Lemma 4.1, u dan v harus berada pada kelas partisi yang berbeda dalamhimpunan partisi pembeda dari $V(H)$, sehingga $pd(H) = n - 1$. Selanjutnya,karena setiap x_i, $i = 1, \dots, n$, dalam graf $G = K_n$juga memiliki jarak yang sama, maka berdasarkan Lemma 4.1, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$juga harus berada pada kelaspartisi yang berbeda di dalam himpunan partisi pembeda dari $V(G)$, sehingga $pd(G) = n$. Karena $K_n \odot K_{n-1}$, adalah graf K_n yang setiap vertexnya, x_i,dihubungkan dengan graf $(K_{n-1})_i$, $i = 1, \dots, n$, maka setiap vertex singelton $u_i$pada H_i dan u_j pada H_j , $i \neq j$, dapat berada dalam kelas partisi yang samadalam himpunan partisi pembeda $S_k \in \prod$, sedemikian hingga S_k memuat beberapa vertex singelton $u \in H_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Sehingga dapat dikatakan bahwa,$pd(K_n \odot K_{n-1}) \geq n + (n - 1)$ yang merupakan batas bawah dari dimensi partisigraf $K_n \odot K_{n-1}$. Sehingga untuk menentukan partisi dimensi dari graf $K_n \odot K_{n-1}$, dapat digunakan teorema sebagai berikut:

Teorema: Untuk $n \geq 3$, maka dimensi partisi dari graf $K_n \odot K_{n-1}$ diberikan sebagai berikut:

$$pd(K_n \odot K_{n-1}) = 2n - 1$$

Bukti: Dengan menggunakan argumentasi yang dijabarkan sebagai akibat Lemma 4.1, didapat bahwa sedikitnya terdapat $2n - 1$ kelas partisi dalam himpunan partisi pembeda $V(K_n \odot K_{n-1})$. Sehingga jelas bahwa batas bawah $pd(K_n \odot K_{n-1}) \geq 2n - 1, n \geq 3$.

Kemudian, untuk menemukan batas atas dimensi partisi graf $K_n \odot K_{n-1}$ dapat dilakukan melalui konstruksi, misalkan diambil himpunan partisi pembeda$\prod = \{S_1, S_2, \dots, S_{(n+n-1)}\}$, dengan rumusan sebagai berikut:

$$\prod = \left\{ \begin{array}{c} S_1 = \{y_{11}, y_{21}, \dots, y_{n1}\} \\ S_2 = \{y_{12}, y_{22}, \dots, y_{n2}\} \\ S_3 = \{y_{13}, y_{23}, \dots, y_{n3}\} \\ \vdots \\ S_{(n-1)} = \{y_{1(n-1)}, y_{2(n-1)}, \dots, y_{n(n-1)}\} \\ S_n = \{x_1\} \\ S_{n+1} = \{x_2\} \\ \vdots \\ S_{n+n-1} = \{x_n\} \end{array} \right.$$

Maka diperoleh representasi $v \in V(K_n \odot K_{n-1})$ terhadap $\prod$ adalah:

$$r(y_{11}|\prod) = (0, 1, 1, \dots, 1, 1, 2, \dots, 2)$$

$$r(y_{21}|\prod) = (0, 1, 1, \dots, 1, 2, 1, \dots, 2)$$

$$\vdots$$

$$r(y_{1(n-1)}|\prod) = (0, 0, 1, \dots, 1, 2, 2, \dots, 1)$$

$$r(y_{12}|\prod) = (1, 0, 1, \dots, 1, 1, 2, \dots, 2)$$

$$r(y_{22}|\prod) = (1, 0, 1, \dots, 1, 2, 1, \dots, 2)$$

$$\vdots$$

$$r(y_{2(n-1)}|\prod) = (1, 0, 1, \dots, 1, 2, 2, \dots, 1)$$

$$\vdots$$

$$r(y_{n(n-1)}|\prod) = (1, 1, 1, \dots, 0, 0, 2, \dots, 1)$$

$$r(x_1|\prod) = (1, 1, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$$

$$r(x_2|\prod) = (1, 1, 1, \dots, 1, 1, 0, \dots, 1)$$

$$\vdots$$

$$r(x_n|\prod) = (1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1, \dots, 0)$$

Sehingga dapat dilihat bahwa setiap vertex dalam $K_n \odot K_{n-1}$ memiliki representasi yang berbeda terhadap $\prod$, dengan demikian kardinalitas dari $\prod$adalah $|\prod| = n + n - 1 = 2n - 1$. Jadi batas atas dimensi partisi dari $K_n \odot K_{n-1}$adalah $pd(K_n \odot K_{n-1}) \leq 2n - 1, n \geq 3$.

Oleh karena batas atasdan batas bawah sama, maka kardinalitas minimum dari$\prod$adalah $2n - 1$.Sehingga dimensi partisi dari $K_n \odot K_{n-1}$ adalah $pd(K_n \odot K_{n-1}) = 2n - 1, n \geq 3$.■

Sama halnya dengan dimensi metrik, dalam paper ini juga tidak menjelaskan lebih banyak mengenai dimensi partisi pada graf $K_n \odot K_{n-1}$ untuk $n < 3$. Hal ini juga dikarenakan $K_2 \odot K_1$isomorfis dengan P_4, sehingga dimensi partisi dari $K_2 \odot K_1$ adalah $pd(K_2 \odot K_1) = pd(P_4) = 2$.Sedangkan untuk $n = 1$, $K_1 \odot K_0$ merupakan graf *trivial*.

Sebelumnya, disebutkan bahwa Darmaji dkk (2009) telah melakukan penelitian terkait dimensi partisi dari graf hasil operasi korona $G \odot$H. Mereka menunjukkan bahwa untuk semua pasangan graf terhubung G an H, $pd(G \odot \mathrm{H}) \leq pd(G) + pd(H)$jika diameter dari H paling besar 2. Sedangkan Chartrand dkk [3] mengungkapkan $pd(G) = n$jika dan hanya jika $G = Kn$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa:

$$\begin{aligned} pd(K_n \odot K_{n-1}) &\leq pd(K_n) \\ &+ pd(K_{n-1}) \\ &= n + (n-1) \\ &= 2n - 1. \end{aligned}$$

Dari Teorema-teorema di atas maka didapat Akibat yang dapat digunakansebagai bentuk umum dari dimensi partisi pada graf hasil korona graf komplit$K_m \odot K_n$, dengan $m, n \geq 2$.

Akibat: *Jika graf G adalah* K_m, $m \geq 2$, *dan graf H adalah* K_n, $n \geq 2$. *Makadimensi partisi dari* $K_m \odot K_n$ *adalah:*

$$dim(K_m \odot K_n) = m + n$$

Simpulan

Dari hasil analisis dimensi metrik dan dimensi partisi pada graf hasil korona $K_n \odot K_{n-1}$ didapat kesimpulan sebagai berikut:

1. Dimensi metrik dari graf hasil korona $K_n \odot K_{\mathrm{n}-1}$, dengan $n \geq 3$ adalah $dim(K_n \odot K_{\mathrm{n}-1}) = n(n-2)$.
2. Dimensi metrik dari graf hasil korona $K_m \odot K_{\mathrm{n}}$, dengan $m, n \geq 2$ adalah $dim(K_m \odot K_{\mathrm{n}}) = m(n-1)$.
3. Dimensi partisi dari graf hasil korona $K_n \odot K_{\mathrm{n}-1}$, dengan $n \geq 3$ adalah $pd(K_n \odot K_{\mathrm{n}-1}) = 2n-1$.
4. Dimensi partisi dari graf hasil korona $K_m \odot K_{\mathrm{n}}$, dengan $m, n \geq 2$ adalah $pd(K_m \odot K_{\mathrm{n}}) = m + n$.

Daftar Pustaka

A.B. Permana, and Darmaji, *Dimensi Metrik Graf Pohon Bentuk Tertentu*, JURNAL TEKNIK POMITS Vol.1, No.1, 2012, 1-4.

Darmaji, and E.T. Baskoro, *Further results on partition dimension of coronaproducts*, AIP Conf. Proc. 1450, 2012, 77-81.

G. Chartrand, E. Salehi, dan P. Zhang, *The Partition dimension of a graph*,Aequantiones Math 59, 2000, 45-54.

G. Chartrand, L. Eroh, M.A. Johnson, and O.R. Oellermann, *Resolvabilityin graphs and the metric dimension of a graph*, Discrete Appl. Math. 105,2000, pp. 99-113.

H.Iswadi, E.T. Baskoro, and R. Simanjuntak, *On the metric dimension ofcorona product of graphs*, Far East Journal of Mathematical Sciences 52 (2),2011, 155-170.

I.G. Yero, D. Kuziak, and J.A.Rodr_iguez-Vel_azquez, *On the metric dimension of corona product graphs*, Computers & Mathematics with ApplicationsVolume 61, Issue 9, May 2011, Pages 2793-2798.