Tersedia online di http://ejournal.unitomo.ac.id/index.php/mipa
ISSN 2337-9421 (cetak) / ISSN 2581-1290 (online)
https://dx.doi.org/10.25139/smj.v8i1.2380

-------------------------------------Vol 8(1), Maret 2020, Halaman 21-32-------------------------------------

Analisis Solusi Model Rangkaian Listrik Menggunakan Metode Transformasi *Laplace* Modifikasi

Fitriana Minggani
STKIP PGRI Sumenep – Jalan Trunojoyo, Gedungan, Sumenep, Jawa Timur, Indonesia
email: inggadpk@stkippgrisumenep.ac.id

Diterima :13 Februari 2020, Direvisi :15 April 2020, Disetujui : 16 April 2020.

Abstract

Laplace transform is one type of integral transformation that allows to be used to solve homogeneous and non- homogeneous second order linear differential equations. Laplace transform modification is obtained by adding coefficients through the corresponding variables in the Laplace transform equation. There are several applications of differential equations, one of which is the electrical circuit model. The prblem that often becomes an obstacle is when encountering a limit value problem. This paper aims to obtain the solution of linear differential equations in a simple electric circuits (RLC) model connected in series, using a modified Laplace transform method. The results of this study provide indicate that a modified Laplace transform method can providesolution of nonhomogenous second order linear differential equation in the form of electric charge equation over time.

Keywords:*electrical circuits, Laplace transform modifications, second order linear differential equations*

Abstrak

Transformasi Laplace merupakan salah satu jenis transformasi integral yang memungkinkan digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear orde dua homogen maupun non homogen. Transformasi Laplace Modifikasi diperoleh dengan melakukan penambahan koefisien melalui variabel yang sesuai pada persamaan Transformasi Laplace. Terdapat beberapa penerapan persamaan diferensial, salah satunya yaitu pada model rangkaian listrik. Permasalahan yang seringkali menjadi kendala yaitu ketika menjumpai masalah nilai batas. Paper ini bertujuan untuk mendapatkan penyelesaian persamaan diferensial linear pada model rangkaian listrik sederhana (RLC) yang dihubungkan secara seri, menggunakan metode transformasi Laplace modifikasi. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa transformasi Laplace modifikasi dapat memberikan solusi persamaan diferensial linear orde dua non homogen dalam bentuk persamaan muatan listrik terhadap waktu.

Kata Kunci:*persamaan diferensial linear orde dua, rangkaian listrik, transformasi Laplace modifikasi*

1.PENDAHULUAN

Matematika menurut Susanta dalam [1] menyatakan bahwa ilmu pengetahuan yang digunakan secara luas dalam berbagai bidang kehidupan, termasuk dalam menyelesaikan permasalahan di bidang teknik, fisika, ekonomi, biologi, dan yang lainnya. Permasalahan pada bidang tersebut kemudian diidentifikasi, dirumuskan, dan dimodelkan untuk dapat ditentukan solusinya. Adapunpemodelan yang menggunakan simbol matematika dan logika untuk menyajikan permasalahan objek disebut pemodelan matematika atau pemodelan simbolik. Tujuan dari pemodelan matematika, menurut Susanta dalam [1] memberikan deskripsi terkait keadaan, sifat, maupun perilaku objek agar mudah dikenali, diperlajari, dan dimanipulasi. Hal yang perlu dilakukan saat menyusun model matematika pada suatu permasalahan adalah mengidentifikasi semua besaran yang terlibat, memberi lambang pada semua besaran,

Tersedia online di http://ejournal.unitomo.ac.id/index.php/mipa
ISSN 2337-9421 (cetak) / ISSN 2581-1290 (online)
https://dx.doi.org/10.25139/smj.v8i1.2380

menentukan besaran kostanta dan variabel, menentukan hubungan variabel dan konstanta sehingga terbentuk model matematika, mencari penyelesaian berdasarkan teori-teori dalam matematika, dan menginterpretasikan solusi model sehingga diperoleh solusi permasalahan [1].

Metode transformasi *Laplace* (*Laplace Transformation*) merupakan suatu metode yangdapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial, yang memetakan masalah nilai awal ke dalam suatu persamaan aljabar atau suatu sistem persamaan yang dapat diselesaikan dengan metode aljabar dan tabel transformasi Laplace. Metode ini pertama kali diperkenalkan oleh *Pierre Simon Marquas De Laplace* (1749 – 1827) seorang matematikawan Perancis dan seorang guru besar di Paris. Dengan metode transformasi Laplace akan dihasilkan solusi khusus secara langsung sesuai dengan kondisi masalah nilai awal yang diberikan [2].

Sebenarnya sebelum ditemukan transformasi *Laplace*, menurut Debnath dalam [3], menyatakan bahwa suatu transformasi integral dimulai dengan munculnya transformasi *Fourier* yang kemudian diikuti oleh transformasi *Laplace* pada tahun 1822 yang merupakan turunan dari transformasi *Fourier*. Namun, tidak semua persamaan diferensial dapat diselesaikan dengan transformasi *Laplace*.

Pada persamaan diferensial biasa dengan koefisien variabel untuk masalah nilai awal dan nilai batas, terdapat beberapa persamaan diferensial yang tidak dapat diselesaikan dengan transformasi *Laplace.* Sejalan dengan penelitian [3]yaitu melakukan modifikasi pada transformasi *Laplace* yang dinamakan transformasi *Laplace* modifikasi, dengan melakukan penambahan koefisien melalui variabel yang sesuai pada persamaan Transformasi *Laplace* yang dinyatakan dalam bentuk $\mathcal{L}_M\{f(t)\} = F(s)=\sqrt{s}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ dengan $t > 0$ dan e^{-st}merupakan fungsi kernel transformasi, serta s merupakan variabel transformasi untuk $s \in \mathbb{R}^+$.

Rangkaian listrik merupakan kumpulan elemen atau komponen listrik yang saling berhubungan, serta melalui tahapan tertentu paling sedikit mempunyai satu lintasan tertutup. Suatu rangkaian listrik dapat dimodelkan ke dalam suatu persamaan diferensial yaitu persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien konstanta [2].

Pada rangkaian listrik terdapat komponen atau elemen yang disebut elemen aktif, merupakan elemen yang menghasilkan energi, dalam hal ini adalah sumber tegangan dan sumber arus. Selain itu terdapat komponen atau elemen pasif, artinya elemen yang tidak menghasilkan energi, dalam hal ini elemen yang hanya dapat menyerap energi (resistor), elemen yang dapat menyerap energi dalam bentuk medan magnet (kapasitor), dan elemen yang dapat menyimpan enegi (induktor) [2].

ISSN 2337-9421 (cetak) / ISSN 2581-1290 (online)
https://dx.doi.org/10.25139/smj.v8i1.2380

--------------------------------------Vol 8(1), Maret 2020, Halaman 21-32-------------------------------------

Persamaan rangkaian listrik sederhana yang berbentuk, berupa persamaan diferensial linear orde dua nonhomogen ini, akan nampak rumit apabila diselesaikan dengan metode aljabar biasa. Oleh karena itu, pada paper ini akan diterapkan transformasi *Laplace* modifikasi untuk mendapatkan solusi umum persamaan diferensial tersebut. Menurut [2], yang menyatakan bahwa suatu model rangkaian listrik ini akan dapat dianalisis atau diselesaikan menggunakan metode transformasi *Laplace* modifikasi. Hal ini disebabkan oleh karakteristik dari tiap-tiap elemen rangkaian listrik yang berbeda, meskipun secara definitif V_R, V_L dan V_C merupakan besarnya arus yang mengalir pada elemen R, L dan C .

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini digunakan studi literatur yang membahas fenomena dalam kehidupan sehari-hari yaitu mengenai rangkaian listrik. Penulis mendeskripsikan suatu masalah atau fenomena yang berupa besar arus listrik pada suatu rangkaian tertutup pada waktu t, berbentuk rangkaian listrik sederhana (RLC) dan disusun secara seri. Model matematika yang dihasilkan dari fenomena rangkaian listrik sederhana (RLC) ini, berbentuk persamaan diferensial linear orde dua nonhomogen yang didapatkan berdasarkan hukum Kirchoff. Setelah diformulasikan dalam model matematika, kemudian menerapkan metode transformasi *Laplace* modifikasi pada kedua sisi persamaan diferensial tersebut. Selanjutnya mensubstitusi fenomena awal yang diberikan, sekaligus menyusun persamaan pembantu. Langkah berikutnya melakukan invers transformasi *Laplace* modifikasiuntuk mendapatkan solusi khusus dari rangkaian listrik sederhana (RLC) tersebut.

Transformasi *Laplace*

Transformasi *Laplace* dapat digunakan untuk mereduksi persamaan diferensial ke suatu masalah aljabar. Aljabar tersebut dapat menjadi rumit pada suatu kejadian, tetapi sebenarnya dalam beberapa kasus ini akan lebih sederhana daripada penyelesaian persamaan diferensial secara langsung[4]. Transformasi *Laplace* secara umum didefinisikan oleh:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{1}$$

dengan $t > 0$, $\mathcal{L}$ dinamakan operator transformasi Laplace, selanjutnya e^{-st}merupakan fungsi kernel transformasi, serta s merupakan variabel transformasi dalam $s \in \mathbb{R}^+$[3]. Terdapat beberapa sifat penting[4]yang dapat digunakan untuk menentukan Transformasi *Laplace* beberapa fungsi, antara lain:

1. Sifat Linear

   Untuk konstanta c_1 dan c_2 dipunyai

Tersedia online di http://ejournal.unitomo.ac.id/index.php/mipa
ISSN 2337-9421 (cetak) / ISSN 2581-1290 (online)
https://dx.doi.org/10.25139/smj.v8i1.2380

--Vol 8(1), Maret 2020, Halaman 21-32 --------------------------------------

$$\mathcal{L}\{k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)\} = k_1\mathcal{L}\{f_1(t)\} + k_2\mathcal{L}\{f_2(t)\} \qquad (2)$$

2. Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = sF(0) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n\mathcal{L}F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \qquad (3)$$

dengan $f^{(r)}(0)$ merupakan nilai dari $f^{(r)}(t)$ pada $t = 0, r = 0,1,2,\ldots,(n-1)$ dan n bilangan bulat positif.

Salah satu keunggulan transformasi laplace dalam menyelesaikan suatu masalah nilai awal, dapat secara langsung artinya bahwa masalah nilai awal dapat diselesaikan tanpa terlebih dahulu harus menentukan solusi umumnya atau persamaan- persamaan non homogen dapat diselesaikan tanpa terlebih dahulu menyelesaikan persamaan homogennya.

Transformasi *Laplace* Modifikasi

Transformasi *Laplace* [3], secara umum dapat ditulis sebagai $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ seperti pada persamaan (1).

Jika persamaan (1) dikalikan dengan $\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s}}$ diperoleh

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

$$\sqrt{s}\mathcal{L}\{f(t)\} = \sqrt{s}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

$$\sqrt{s}\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}_M\{f(t)\} \qquad (4)$$

Notasi $\mathcal{L}_M\{f(t)\}$ merupakan Transformasi *Laplace* modifikasi yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathcal{L}_M\{f(t)\} = \sqrt{s}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \qquad (5)$$

Transformasi *Laplace* modifikasi memiliki sifat-sifat seperti operator linear, sifat diferensial, sifat integral, sifat translasi pertama, sifat translasi kedua, sifat konvolusi, dan sifat nilai awal.

Invers Transformasi *Laplace* Modifikasi

Jika transformasi *Laplace* modifikasi [3] dari fungsi $f(t)$ adalah $\mathrm{T}(s)$ atau $\mathcal{L}_M\{f(t)\}$ maka fungsi adalah invers transformasi *Laplace* modifikasi dari $\mathrm{T}(s)$ dan disimbolkan

Tersedia online di http://ejournal.unitomo.ac.id/index.php/mipa
ISSN 2337-9421 (cetak) / ISSN 2581-1290 (online)
https://dx.doi.org/10.25139/smj.v8i1.2380

---------------------------------------Vol 8(1), Maret 2020, Halaman 21-32--------------------------------------

dengan $\mathcal{L}_M^{-1}\{T(s)\}$. Notasi $\mathcal{L}_M^{-1}$ merupakan notasi invers dari notasi transformasi *Laplace* modifikasi. Hubungan antara fungsi $f(t)$ dan $\mathcal{L}_M\{f(t)\}$ dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1 Transformasi *Laplace* Modifikasi pada beberapa fungsi

No.	$f(t)$	$\mathcal{L}_M\{f(t)\}$
1.	1	$s^{-\frac{1}{2}}$
2.	t	$s^{-\frac{3}{2}}$
3.	t^n	$n!s^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}$
4.	e^{at}	$\frac{\sqrt{s}}{s-a}$
5.	te^{at}	$\frac{\sqrt{s}}{(s-a)^2}$
6.	$\sin at$	$\frac{a\sqrt{s}}{s^2+a^2}$
7.	$\cos at$	$\frac{s\sqrt{s}}{s^2+a^2}$

Nilai Awal dan Nilai Akhir

Sifat transformasi *Laplace* modifikasi berkenaan dengan nilai awal dan nilai akhir, dapat dinyatakan sebagai berikut [5]:

Nilai awal : $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} \sqrt{s}F(s)$

Nilai akhir : $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} \sqrt{s}F(s)$

Jadi, nilai $f(t)$ pada $t=0^+$ di kawasan waktu (nilai awal) sama dengan nilai $\sqrt{s}F(s)$ pada tak hingga di kawasan s. Sedangkan nilai $f(t)$ pada $t=\infty$ (nilai akhir) sama dengan nilai $\sqrt{s}F(s)$ pada titik asal di kawasan s. Sifat ini dapat diturunkan dari sifat diferensiasi.

Persamaan Diferensial Linear Orde Dua

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat fungsi yang tidak diketahui dan derivatifnya. Persamaan diferensial ditinjau dari banyaknya variabel bebas dari fungsi yang tidak diketahui, dikelompokkan menjadi persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial dengan fungsi yang tidak diketahui adalah fungsi dari satu variabel bebas. Sedangkan, persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang memuat derivatif parsial fungsi yang tidak diketahui terhadap dua

Tersedia online di http://ejournal.unitomo.ac.id/index.php/mipa
ISSN 2337-9421 (cetak) / ISSN 2581-1290 (online)
https://dx.doi.org/10.25139/smj.v8i1.2380

--Vol 8(1), Maret 2020, Halaman 21-32 --------------------------------------

atau lebih variabel bebas [4]. Untuk orde dari persamaan diferensial ditunjukkan oleh derivatif tertinggi yang muncul dalam persamaan tersebut.

Selain itu, persamaan diferensial juga dikelompokkan menjadi persamaan linear dan nonlinear. Persamaan diferensial biasa yang dinyatakan ke dalam bentuk $F\left(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ merupakan linear jika F merupakan fungsi linear dari variabel-variabel $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ [4]. Definisi tersebut juga berlaku untuk persamaan diferensial parsial.

Persamaan diferensial linear orde$-n$ dengan koefisien konstanta, berupa persamaan yang berbentuk [1]:

$$a_n(t)\frac{d^{(n)}y}{dt^{(n)}} + a_{n-1}(t)\frac{d^{(n-1)}y}{dt^{(n-1)}} + \ldots + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y = R(t)$$

atau

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = R(t) \tag{6}$$

dimana a_i, $i = 0,1,2,\ldots,n$

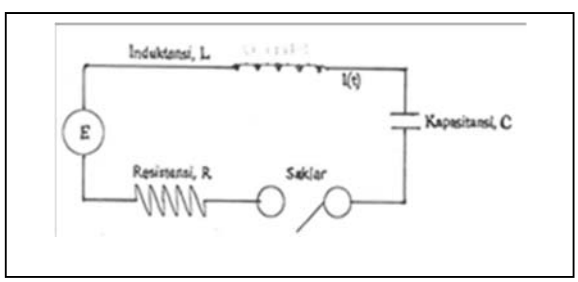
Persamaan diferensial linear dikatakan homogen, apabila fungsi $R(t)$ pada persamaan (6) bernilai nol untuk setiap t. Sedangkan persamaan diferensial linear dikatakan nonhomogen, apabila fungsi $R(t)$ pada persamaan (6) bernilai bukan nol untuk setiap t.

Berdasarkan persamaan (6) sehingga persamaan diferensial linear nonhomogen orde dua dengan koefisien konstanta, dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$a_2\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = R(t) \tag{7}$$

dengan $a_2 \neq 0$, a_0 dan a_1 adalah konstanta real

Rangkaian Listrik Sederhana (RLC Seri)



Gambar 1 Rangkaian Listrik RLC Seri

Gambar 1 adalah rangkaian listrik sederhana terdiri atas tahanan/hambatan R, satuannya Ohm; sebuah kapasitor C, satuannya Farad; sebuah induktor L, satuannya Henry; dan gaya

Tersedia online di http://ejournal.unitomo.ac.id/index.php/mipa
ISSN 2337-9421 (cetak) / ISSN 2581-1290 (online)
https://dx.doi.org/10.25139/smj.v8i1.2380

---------------------------------------Vol 8(1), Maret 2020, Halaman 21-32-------------------------------------

elektromotif *emf* $E(t)$, satuannya Volt. Sebuah baterai atau generator sebagai sumber listrik, yang dihubungkan secara seri. Arus I yang mengalir melalui rangkaian tersebut diukur dalam Ampere dan muatan pada kapasitor, yang satuannya Coulomb[4].

Hukum Loop Kirchoff berbunyi " *jumlah aljabar dari penurunan tegangan dalam sebuah rangkaian listrik tertutup sederhana adalah nol*". Diketahui bahwa penurunan tegangan pada tahanan/ hambatan, kapasitor dan induktor masing-masing adalah $RI, \left(\frac{1}{C}\right)q,$ dan $L\left(\frac{dI}{dt}\right)$, dengan q merupakan muatan atau kapasitas dari kapasitor dalam waktu t. Penurunan tegangan dalam *emf* (*electromotive force*) adalah $-E(t)$. Jadi, dari hukum Loop Kirchoff [4], dimiliki:

$$\sum V + (-E(t)) = 0$$

$$V_R + V_L + V_C - E(t) = 0$$

$$RI + L\left(\frac{dI}{dt}\right) + \left(\frac{1}{C}\right)q - E(t) = 0 \tag{8}$$

Arus dalam circuit berhubungan dengan perubahan muatan atau kapasitas yang berada dalam kapasitor, sehingga hubungan antara q dan I adalah

$$I = \frac{dq}{dt}, \text{ kemudian } \frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} \tag{9}$$

Substitusikan persamaan (9) ke (8), diperoleh

$$R\left(\frac{dq}{dt}\right) + L\left(\frac{d^2q}{dt^2}\right) + \left(\frac{1}{C}\right)q - E(t) = 0$$

$$L\left(\frac{d^2q}{dt^2}\right) + R\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{1}{C}\right)q = E(t)$$

Kalikan masing-masing ruas dengan $\left(\frac{1}{L}\right)$, menjadi

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \left(\frac{1}{LC}\right)q = \frac{1}{L}E(t)$$

Karena $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$ dan E_0 konstan, sehingga

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \left(\frac{1}{LC}\right)q = \frac{1}{L}E_0 \sin(\omega t) \tag{10}$$

Kondisi-kondisi awal dari q, adalah

Tersedia online di http://ejournal.unitomo.ac.id/index.php/mipa
ISSN 2337-9421 (cetak) / ISSN 2581-1290 (online)
https://dx.doi.org/10.25139/smj.v8i1.2380

--Vol 8(1), Maret 2020, Halaman 21-32 --------------------------------------

$$q(0)=q_0\ ;\ \left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=0}=I(0)=I_0 \tag{11}$$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan persamaan (10), yang merupakan persamaan umum rangkaian listrik RLC yang disusun secara seri, berbentuk persamaan diferensial orde dua nonhomogen. Selanjutnya akan diberikan syarat awal yang harus dipenuhi sehingga tidak dapat diselesaikan secara langsung maupun dengan metode transformasi *Laplace* seperti biasa. Oleh karenanya akan digunakan transformasi *Laplace*modifikasi. Syarat awal tersebut merupakan saat osilasi pegas berada pada simpangan tertentu dengan kecepatan awal nol.

Jika diberikan syarat awal $q(0)=A,\ q'(0)=B=0,$ dan $\mathcal{L}_M\{q\}=q(s)$, maka dengan menggunakan transformasi *Laplace* modifikasi pada kedua ruas dari persamaan (10), diperoleh:

$$\mathcal{L}_M\left\{\ddot{q}+\frac{R}{L}\dot{q}+\left(\frac{1}{LC}\right)q\right\}=\mathcal{L}_M\left\{\frac{1}{L}E_0\sin(\omega t)\right\}$$

$$\mathcal{L}_M\{\ddot{q}\}+\frac{R}{L}\mathcal{L}_M\{\dot{q}\}+\frac{1}{LC}\mathcal{L}_M\{q\}=\frac{1}{L}E_0\mathcal{L}_M\{\sin\omega t\}$$

$$\left[s^2\mathcal{L}_M(q)-s\sqrt{s}q(0)-\sqrt{s}q'(0)\right]+\frac{R}{L}\left[s\mathcal{L}_M(q)-\sqrt{s}q(0)-\sqrt{s}q'(0)\right]+\left(\frac{1}{LC}\right)q(s)$$
$$=\frac{1}{L}E_0\mathcal{L}_M\{\sin\omega t\}$$

$$\left[s^2q(s)-s\sqrt{s}A-\sqrt{s}B\right]+\frac{R}{L}\left[sq(s)-\sqrt{s}A\right]+\left(\frac{1}{LC}\right)q(s)=\frac{1}{L}E_0\left(\frac{\omega\sqrt{s}}{s^2+\omega^2}\right)$$

$$s^2q(s)+\frac{R}{L}sq(s)+\left(\frac{1}{LC}\right)q(s)=As\sqrt{s}+\frac{R}{L}A\sqrt{s}+B\sqrt{s}+\frac{1}{L}E_0\left(\frac{\omega\sqrt{s}}{s^2+\omega^2}\right)$$

karena $B=0$, sehingga

$$q(s)\left(s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}\right)=As\sqrt{s}+\frac{R}{L}A\sqrt{s}+\frac{1}{L}E_0\left(\frac{\omega\sqrt{s}}{s^2+\omega^2}\right)$$

$$q(s)=\frac{As\sqrt{s}+\frac{R}{L}A\sqrt{s}+\frac{1}{L}E_0\left(\frac{\omega\sqrt{s}}{s^2+\omega^2}\right)}{\left(s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}\right)} \tag{12}$$

Untuk mendapatkan nilai $q(s)$, pada persamaan (12) bagian penyebutnya dapat digunakan bentuk kuadrat sempurna, yaitu

$$\left(s^2+\left(\frac{R}{L}\right)s+\frac{1}{LC}\right) = \left[s^2+\left(\frac{R}{L}\right)s+\left(\frac{R}{2L}\right)^2\right]+\left[\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2\right]$$

$$= \left(s+\frac{R}{2L}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}\right)^2$$

$$= \left(s+\frac{R}{2L}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}}{\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}}$$

$$\left(s^2+\left(\frac{R}{L}\right)s+\frac{1}{LC}\right) = \frac{\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}\cdot\left[\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}\right)^2\right]}{\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}}$$

dengan memisalkan $a=\left(\frac{R}{2L}\right)$ dan $b=\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}$, maka:

$$\left(s^2+\left(\frac{R}{L}\right)s+\frac{1}{LC}\right)=\frac{\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}\cdot\left[(s+a)^2+b^2\right]}{b} \tag{13}$$

Kemudian substitusikan persamaan (13) ke persamaan (12)

$$q(s)=\frac{As\sqrt{s}+\frac{R}{L}A\sqrt{s}+\frac{1}{L}E_0\left(\frac{\omega\sqrt{s}}{s^2+\omega^2}\right)}{\frac{\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}\cdot\left[(s+a)^2+b^2\right]}{b}} \qquad \text{atau}$$

$$q(s)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}}\cdot\frac{As\sqrt{s}+\frac{R}{L}A\sqrt{s}+\frac{1}{L}E_0\left(\frac{\omega\sqrt{s}}{s^2+\omega^2}\right)}{\left[(s+a)^2+b^2\right]}\cdot b$$

$$q(s)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}}\cdot\left[A\frac{bs\sqrt{s}}{(s+a)^2+b^2}+\frac{R}{L}\frac{b\sqrt{s}}{(s+a)^2+b^2}+\frac{E_0}{L}\left(\frac{b\sqrt{s}}{(s+a)^2+b^2}\right)\cdot\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)\right]$$

$$q(s)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}}\cdot\left[A\frac{bs\sqrt{s}}{(s+a)^2+b^2}+\frac{R}{L}\frac{b\sqrt{s}}{(s+a)^2+b^2}+\frac{1}{L}\left(\frac{b\sqrt{s}}{(s+a)^2+b^2}\right)\cdot\left(R+E_0\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)\right)\right] \tag{14}$$

Tersedia online di http://ejournal.unitomo.ac.id/index.php/mipa
ISSN 2337-9421 (cetak) / ISSN 2581-1290 (online)
https://dx.doi.org/10.25139/smj.v8i1.2380

Setelah mendapatkan bentuk sederhana dari fungsi hasil transformasi, kemudian persamaan (14) ditransformasikan dengan invers transformasi *Laplace* modifikasi sehingga diperoleh solusi dari persamaan diferensial yang diberikan:

$$\mathcal{L}_M^{-1}\{q(s)\} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} \cdot \mathcal{L}_M^{-1}\left\{A\left(\frac{bs\sqrt{s}}{(s+a)^2+b^2}\right) + \frac{R}{L}\left(\frac{b\sqrt{s}}{(s+a)^2+b^2}\right) + \frac{1}{L}\left(\frac{b\sqrt{s}}{(s+a)^2+b^2}\right)\cdot\left(R + E_0\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)\right)\right\}$$

$$\mathcal{L}_M^{-1}\{q(s)\} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} \cdot \left[A\mathcal{L}_M^{-1}\left\{\frac{bs\sqrt{s}}{(s+a)^2+b^2}\right\} + \frac{R}{L}\mathcal{L}_M^{-1}\left\{\frac{bs\sqrt{s}}{(s+a)^2+b^2}\right\} + \frac{1}{L}\mathcal{L}_M^{-1}\left\{\frac{b\sqrt{s}}{(s+a)^2+b^2}\right\}\cdot\left(R + E_0\mathcal{L}_M^{-1}\left\{\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right\}\right)\right]$$

Berdasarkan Tabel 1., didapatkan

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} \cdot \left(Ate^{-at}\sin bt + \frac{R}{L}e^{-at}\sin bt + \frac{1}{L}e^{-at}\sin bt \cdot (R + E_0 \sin \omega t)\right)$$

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} \cdot (e^{-at}\sin bt)\left(At + \frac{R}{L} + \frac{1}{L}\cdot(R + E_0 \sin \omega t)\right)$$

Kemudian substitusikan kembali nilai a dan b

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} \cdot \left(e^{-\left(\frac{R}{2L}\right)t} \sin\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\, t\right)\cdot\left(At + \frac{R}{L} + \frac{1}{L}(R + E_0 \sin \omega t)\right)$$

Dengan demikian, solusi persamaan rangkaian listrik sedehana RLC yang disusun secara seri, diperoleh:

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} \cdot \left(e^{-\left(\frac{R}{2L}\right)t} \sin\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\, t\right)\cdot\left(At + \frac{R}{L} + \frac{1}{L}(R + E_0 \sin \omega t)\right)$$

4. KESIMPULAN

Model rangkaian listrik sedehana RLC yang disusun secara seri, berbentuk persamaan diferensial linear orde dua non homogen. Secara matematis, setelah ditentukan $q(s)$, selanjutnya

ISSN 2337-9421 (cetak) / ISSN 2581-1290 (online)
https://dx.doi.org/10.25139/smj.v8i1.2380

---------------------------------------Vol 8(1), Maret 2020, Halaman 21-32-------------------------------------

dilakukan invers dari transformasi *Laplace* modifikasi $q(t) = \mathcal{L}_M^{-1}\{q(s)\}$. Jadi, dengan menerapkan metode transformasi *Laplace* modifikasi, yang merupakan pengembangan dari transformasi *Laplace*, dapat memberikan solusi model rangkaian listrik sedehana RLC yang disusun secara seri, dalam bentuk persamaan muatan listrik terhadap waktu.

Manfaat dari penelitian ini adalah untuk mendapatkan solusi model rangkaian listrik sederhana (RLC) yang dirangkai secara seri, yang berupa persamaan diferensial linear orde dua nonhomogen, yang diselesaikan menggunakan metode transformasi *Laplace*modifikasi. Untuk penelitian lebih lanjut antara lain solusi model rangkaian listrik yang disusun secara paralel, serta memperhatikan ketika penurunan tegangan *emf* tidak konstan.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] R. Maharani, “Aplikasi Transformasi Laplace Pada Persamaan Differensial Orde Dua Untuk Pendulum Sederhana dan Pendulum Fisis,” *Stain J. Math. Teach.*, vol. 1, 2017.

[2] S. Arifin, Muhammad Wakhid Musthofa, “Aplikasi Transformasi Laplace Pada Rangkaian Listrik,” *J. Fourier*, vol. 2, no. 1, pp. 54–70, Apr. 2013.

[3] Y. Yusnanda, Helmi, “Transformasi Laplace Modifikasi Untuk Menyelesaikan Beberapa Persamaan Diferensial Biasa Linear,” *Bul. Ilm. Mat. Stat. dan Ter.*, vol. 08, no. 1, pp. 53–62, 2019.

[4] D. B. Nugroho, *Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya: Penyelesaian Manual dan Menggunakan Maple*, 1st ed. Yogyakarta: Graha Ilmu, 2011.

[5] S. Sudirham, “Analisis Rangkaian Listrik,” vol. 2, 2012, p. 15.

Tersedia online di http://ejournal.unitomo.ac.id/index.php/mipa
ISSN 2337-9421 (cetak) / ISSN 2581-1290 (online)
https://dx.doi.org/10.25139/smj.v8i1.2380

--Vol 8(1), Maret 2020, Halaman 21-32 --