

Prediksi Indeks Standar Pencemar Udara (ISPU) di Kota Surabaya Menggunakan Rantai Markov Waktu Diskrit

Kistosil Fahim^{1)*}, Syifa' Amanatus Sholichah²⁾, Lukman Hanafi³⁾, Sentot Didik Surjanto⁴⁾,
Iis Herisman⁵⁾, Wahyu Fistia Doctorina⁶⁾

^{1,2,3,4,5,6)}Institut Teknologi Sepuluh Nopember – Jalan Teknik Kimia, Surabaya, 60111, Indonesia

*Penulis Korespondensi : email: fahim@its.ac.id

Diterima: 31 Juli 2024, Direvisi: 22 Agustus 2024, Disetujui: 23 Agustus 2024.

Abstract

The Air Pollution Standard Index (API) is a numerical measure that indicates air quality conditions at a specific location. Poor air quality can significantly impact health. APIs monitored and reported through the Air Quality Monitoring Station (AQMS) display API numbers and categories such as good, moderate, unhealthy, very unhealthy, and hazardous. Since API values can change over time, long-term air quality predictions are essential for implementing preventive measures. In this research, we use a Discrete-Time Markov Chain (DTMC) to observe state transitions based on the API in Surabaya from January 2019 to November 2023. A 3×3 transition probability matrix is obtained, fulfilling the Markov property with state space corresponding to the API categories present in the data. We analyze the Markov chain corresponding to occupancy time and limiting behavior. The classification reveals that the Markov chain is irreducible and aperiodic, ensuring a unique limiting distribution. Subsequently, we develop a DTMC model to predict data for December 2023, covering 31 days. The prediction results are compared with actual data for December 2023. Evaluation metrics include Mean Absolute Percentage Error (MAPE) and Root Mean Squared Error (RMSE) and we get a MAPE of 4.8387% and an RMSE of 0.3111.

Keywords: Air Pollution Standard Index (API); Air quality prediction; Discrete Time Markov Chains; Transition probability.

Abstrak

Indeks Standar Pencemar Udara (ISPU) merupakan nilai yang menunjukkan kondisi kualitas udara pada lokasi tertentu. Kualitas udara yang buruk dapat memberikan dampak yang berbahaya bagi kesehatan. ISPU yang dipantau dan dilaporkan melalui Stasiun Pemantau Kualitas Udara (SPKUA) dapat menampilkan nilai dan kategori ISPU, yaitu baik, sedang, tidak sehat, sangat tidak sehat, dan berbahaya. ISPU dapat berubah seiring berjalannya waktu sehingga diperlukan prediksi kualitas udara untuk jangka panjang agar dapat dilakukan tindakan pencegahan. Pada penelitian ini digunakan rantai Markov waktu diskrit untuk mengamati transisi keadaan berdasarkan ISPU di Kota Surabaya mulai Januari 2019-November 2023. Diperoleh matriks probabilitas transisi berukuran 3×3 yang memenuhi properti Markov dengan ruang keadaan berupa kategori ISPU yang muncul pada data. Analisis yang dilakukan pada rantai Markov adalah waktu okupansi dan limiting behavior. Dari hasil analisis menunjukkan bahwa rantai Markov ini bersifat irreducible dan aperiodik sehingga distribusi limitnya ada dan tunggal. Selanjutnya matriks probabilitas transisi yang telah dibuat digunakan untuk memprediksi data pada bulan Desember 2023 yang berjumlah 31 hari. Hasil prediksi dibandingkan dengan data aktual yaitu data bulan Desember 2023. Evaluasi tersebut menggunakan Mean Absolute Percentage Error (MAPE) dan Root Mean Squared Error (RMSE) dan didapatkan MAPE 4.8387% dan RMSE 0.3111.

Kata Kunci: Indeks Standar Pencemar Udara (ISPU); Prediksi kualitas udara; Probabilitas transisi; Rantai Markov waktu diskrit.

1. PENDAHULUAN

Laporan Indeks Air Quality Life Indeks (AQLI) menunjukkan bahwa Indonesia merupakan salah satu negara yang paling berkontribusi terhadap polusi udara global [1]. Enam negara yaitu

Indonesia, China, India, Pakistan, Bangladesh, dan Nigeria memiliki populasi penduduk yang besar sehingga tingkat polusi udara enam negara ini menyumbang 75% dari total beban polusi udara global[1]. Polusi udara yang tinggi dapat memberikan dampak yang berbahaya bagi kesehatan manusia. Jenis penyakit yang berkaitan dengan polusi udara adalah Infeksi Saluran Pernapasan Akut (ISPA), asma, dan pneumonia. Tiga penyakit tersebut merupakan kasus Penyakit tertinggi di Indonesia [2]. Data di Indonesia menunjukkan bahwa kasus asma terjadi sebanyak 504 kasus per 100 ribu penduduk, kasus pneumonia terjadi sebanyak 5.900 kasus per 100 ribu penduduk, kasus Penyakit Paru Obstruktif Kronik (PPOK) terjadi 145 kasus per 100 ribu kasus, dan kasus kanker paru terjadi 18 kasus per 100 ribu penduduk [2].

Tingginya kasus kesehatan akibat dari polusi udara tersebut diperlukan *monitoring* kualitas udara secara ketat agar dapat dilakukan tindakan pencegahan. Kualitas udara dapat diketahui melalui Indeks Standar Pencemar Udara (ISPU) dimana indeks ini menggambarkan kondisi mutu udara ambien di lokasi tertentu. ISPU dibagi menjadi 5 kategori, yaitu baik, sedang, tidak sehat, sangat tidak sehat, dan berbahaya. ISPU ditentukan berdasarkan pengukuran konsentrasi ambien yaitu partikulat PM₁₀, partikulat PM_{2.5}, karbon monoksida (CO), nitrogen dioksida (NO₂), sulfur dioksida (SO₂), ozon (O₃), dan hidrokarbon (HC) [3].

Stasiun Pemantau Kualitas Udara Ambien (SPKUA) merupakan alat untuk memantau kualitas udara ambien yang beroperasi terus menerus dan dapat dipantau secara *real-time*. Indonesia memiliki total 68 unit SPKUA dimana Pemerintah Kota Surabaya (2023) memiliki 3 SPKUA, yaitu SPKUA Wonorejo, SPKUA Kebonsari, dan SPKUA Tandes. SPKUA Wonorejo dan Kebonsari merupakan milik Pemerintah Surabaya dan dapat mengukur 5 parameter konsentrasi ambien yaitu SO₂, NO₂, O₃, CO, dan PM₁₀ [4]. SPKUA Tandes merupakan milik Pemerintah Pusat dan dapat mengukur 7 parameter konsentrasi ambien yaitu SO₂, NO₂, O₃, CO, HC, PM₁₀, dan PM_{2.5} [4]. Selain mengukur konsentrasi ambien, SPKUA dapat menampilkan angka dan kategori ISPU secara *real time*. Akan tetapi, SPKUA tidak dapat menampilkan kualitas udara beberapa waktu yang akan datang sementara tindakan pencegahan dapat dilakukan jika mengetahui data di masa mendatang. Hal tersebut dikarenakan ISPU bersifat tidak konstan dan dapat berubah berdasarkan konsentrasi ambien maka diperlukan penelitian mengenai prediksi kualitas udara untuk beberapa waktu ke depan.

Penelitian lain juga dilakukan oleh A. Yousefi Kebriya dan M. Nadi (2024) dengan judul “*Examining Air Pollution Continuity in Tehran Province using Markov Chain Model*” dimana objek penelitian ini adalah kualitas udara di daerah Tehran, Iran [5]. Data yang digunakan adalah rentang 2018-2022. Penelitian ini membagi wilayah Tehran menjadi 5 bagian yaitu utara, selatan,

timur, barat, dan tengah. Model rantai Markov pada penelitian ini dipilih berdasarkan Bayesian Information Criterion (BIC) dimana nilai BIC paling rendah adalah model yang paling optimal, yaitu model rantai Markov orde pertama. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa wilayah utara Tehran secara konsisten *memiliki* kualitas udara yang bagus dengan probabilitas di atas 60%. Sedangkan wilayah dengan kualitas udara terburuk yaitu barat dan selatan dengan probabilitas di bawah 30%. Tetapi kualitas udara dengan keadaan *hazardous* di semua wilayah Tehran tidak akan bertahan lebih dari 2 hari berturut-turut.

Penelitian kualitas udara di Indonesia salah satunya dilakukan oleh Hendri Prabowo (2019) dengan judul “Peramalan Kualitas Udara di Kota Surabaya untuk Menentukan Kategori Index”[6]. Penelitian ini membandingkan 8 metode peramalan yang berbeda, yaitu *time series regression*, ARIMA, FFNN, LSTM, *time series regression* dengan *AR error*, *time series regression* dengan *ARMA error*, *hibrida time series regression* dan FFNN, dan *hibrida time 2 series regression* dan LSTM. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa dari 8 metode, tidak ada metode yang paling dominan, setiap metode optimal untuk memprediksi parameter tertentu contohnya metode ARIMA optimal untuk meramalkan O₃ stasiun SUF 1, O₃ SUF 6, dan PM 10 SUF 1. LSTM optimal untuk meramalkan CO SUF 6, NO₂ SUF 1, dan SO₂ SUF 1, dan lain-lain.

Penelitian kualitas udara di Surabaya juga dilakukan oleh Novi Koesoemanigroem dan kawan-kawan (2021) dengan judul “Peramalan Pencemar Udara di Kota Surabaya Menggunakan Metode DSARIMA dengan Pendekatan *Percentile Error Bootstrap (PEB)*”[7]. Penelitian ini menggunakan metode DSARIMA dan data tahun 2017-2018 yang diukur per jam. Hasil penelitian ini menunjukkan model terbaik DSARIMA dengan RMSE terkecil 0.59 didapatkan dari parameter CO yaitu ARIMA (0,1 [1,2,3]) (0,1,1)24(0,1,1)168. Tingkat *error* terkecil berdasarkan MAPE diperoleh dari parameter SO₂ sebesar 19.13% (kategori baik). Untuk parameter PM 10, CO, dan O₃ termasuk kategori layak, dan parameter NO₂ kategori buruk.

Penelitian mengenai prediksi kualitas udara menggunakan rantai Markov waktu diskrit tergolong masih sedikit dilakukan, padahal metode ini prediksinya lebih akurat karena untuk memprediksi waktu yang akan digunakan semua data pada waktu sebelumnya[8]. Penelitian yang menggunakan rantai Markov diantaranya yaitu oleh Nurul Nadiah Zakaria dan kawan-kawan (2019) dengan judul “*Markov Chain Model Development for Forecasting Air Pollution Index of Miri, Sarawak*”[9]. Dalam penelitian tersebut membahas mengenai peramalan Air Pollution Indeks (API) dengan 6 macam polutan yaitu SO₂, NO₂, CO, O₃, PM 2.5, dan PM 10. Data pada penelitian ini diambil setiap 1 jam dengan rentang tahun 2013 hingga 2017. Hasil penelitian ini berupa probabilitas tiap *state* dalam jangka waktu lama yaitu *good* 0.9231, *moderate* 0.0722,

unhealthy 0.0037, *very unhealthy* 0.0001, dan *hazardous* 0.0009. Maka penelitian tersebut menunjukkan bahwa risiko *hazardous* sangat kecil terjadi di masa mendatang. Akurasi model pada penelitian ini menggunakan RMSE didapatkan nilai sebesar 0.5330 dan MAPE 0.1979%, sehingga model pada penelitian ini tergolong sangat baik [9].

Berdasarkan permasalahan dan penelitian di atas menunjukkan bahwa prediksi kualitas udara dapat dilakukan dengan metode rantai Markov. Pada penelitian ini dilakukan prediksi ISPU di Kota Surabaya menggunakan rantai Markov waktu diskrit berdasarkan probabilitas perpindahan setiap kategori pada ISPU. Selanjutnya model dievaluasi dengan membandingkan data prediksi dan data aktual untuk mengetahui akurasi model yang telah didapatkan.

2. METODE PENELITIAN

Stasiun Pemantau Kualitas Udara Ambien (SPKUA) merupakan alat untuk memantau kualitas udara ambien yang beroperasi terus menerus dan dapat dipantau secara *real-time*. Indonesia memiliki total 68 unit SPKUA dimana Pemerintah Kota Surabaya (2023) memiliki 3 SPKUA, yaitu SPKUA Wonorejo, SPKUA Kebonsari, dan SPKUA Tandes. SPKUA Wonorejo dan Kebonsari merupakan milik Pemerintah Surabaya dan dapat mengukur 5 parameter konsentrasi ambien yaitu SO₂, NO₂, O₃, CO, dan PM₁₀ [4]. SPKUA Tandes merupakan milik Pemerintah Pusat dan dapat mengukur 7 parameter konsentrasi ambien yaitu SO₂, NO₂, O₃, CO, HC, PM₁₀, dan PM_{2.5} [4].

Sumber data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data sekunder dari Dinas Lingkungan Hidup (DLH) Kota Surabaya yang mana diambil dari SPKUA Wonorejo, SPKUA Kebonsari, dan SPKUA Tandes. Data yang diambil berupa 5 parameter polutan (PM 10, CO, NO₂, SO₂, O₃) dan ISPU dari bulan Januari 2019 hingga Desember 2023. Parameter polutan diambil setiap 8 jam sekali dan dilaporkan setiap 24 jam. Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah kategori ISPU yaitu baik, sedang, tidak sehat, sangat tidak sehat, dan berbahaya. Data ISPU disusun secara tabulasi dan dikelompokkan berdasarkan bulan dan tahun pencatatan. Data dibagi menjadi data latih (Januari 2019-November 2023) yang digunakan untuk memodelkan rantai Markov waktu diskrit, dan data uji (Desember 2023) untuk mengetahui akurasi data prediksi.

Data latih pada penelitian ini dimodelkan sesuai prinsip proses stokastik. Data dideskripsikan sebagai peubah acak, ditentukan keadaan berdasarkan kategori pada ISPU, ditentukan waktu pengamatan berdasarkan rentang waktu dari data yang ada, dan ditentukan keadaan *space*-nya. Model proses stokastik ini selanjutnya dikonstruksi menjadi model rantai Markov waktu diskrit sesuai dengan properti rantai Markov. Dari data latih dibentuk matriks probabilitas transisi sesuai

dengan properti rantai Markov. Matriks probabilitas transisi dianalisis lebih lanjut mengenai klasifikasinya, *limiting behavior* (distribusi dari keadaan sistem pada waktu n untuk n menuju takhingga), waktu okupansi, dan distribusi probabilitas n -langkah.

Data prediksi didapatkan dari perhitungan distribusi probabilitas awal dan matriks probabilitas transisi n -langkah. Hasil prediksi dibandingkan dengan data uji untuk diketahui tingkat akurasi. Parameter evaluasi yang digunakan adalah MAPE dan RMSE yang sering digunakan untuk mengukur akurasi dari prediksi [7].

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini dijelaskan mengenai deskripsi data, model rantai Markov waktu diskrit, matriks probabilitas transisi, klasifikasi rantai Markov, waktu okupansi, *limiting behavior*, nilai prediksi, dan parameter evaluasi.

Deskripsi Data

Pada penelitian ini menggunakan data yang diperoleh dari Dinas Lingkungan Hidup (DLH) Kota Surabaya berupa data rekapitulasi harian dari nilai parameter polutan dan ISPU. Data yang didapat mulai dari bulan Januari 2019 hingga Desember 2023 yang terdiri dari waktu pengamatan, nilai ISPU dari lima parameter polutan (PM₁₀, CO, NO₂, SO₂, dan O₃), dan kategori ISPU.

Pada penelitian ini data dibagi menjadi data latih dan data uji. Data latih digunakan untuk membuat model rantai Markov waktu diskrit, yaitu data dari bulan Januari 2019 hingga November 2023. Model tersebut digunakan untuk memprediksi data sebanyak 31 hari sesuai dengan jumlah data uji, yaitu data bulan Desember 2023. Hasil prediksi yang diperoleh dibandingkan dengan data uji untuk diketahui akurasi hasil prediksi.

Format data latih diubah dari tabel menjadi vektor baris guna mempermudah perhitungan pada rantai Markov waktu diskrit. Data tersebut berjumlah 1795 hari, sehingga vektor baris yang digunakan pada penelitian ini berukuran 1×1795 . Dari vektor baris tersebut dicari frekuensi setiap kategori ISPU dan diperoleh hasil pada Tabel 1.

Tabel 1. Frekuensi Setiap Kategori ISPU pada Data Latih

Kategori ISPU	Frekuensi
Baik	761
Sedang	1030
Tidak sehat	4
Sangat tidak sehat	0
Berbahaya	0

Tabel 1 memperlihatkan bahwa hanya ada tiga kategori ISPU yang terjadi, yaitu baik, sedang, dan tidak sehat. Sementara dua kategori lainnya yaitu sangat tidak sehat dan berbahaya bernilai

nol yang artinya dua kategori ini tidak pernah terjadi. Kategori ISPU yang paling banyak terjadi yaitu kategori sedang, dilanjutkan dengan kategori baik dan tidak sehat.

Berdasarkan data latih terlihat bahwa nilai dari kategori ISPU tidak pasti sehingga diperlukan pemodelan yang bersifat stokastik. Dalam hal ini dimisalkan X_n sebagai kategori ISPU pada hari ke n yaitu

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{jika ISPU baik pada hari ke } n, \\ 2 & \text{jika ISPU sedang pada hari ke } n, \\ 3 & \text{jika ISPU tidak sehat pada hari ke } n. \end{cases}$$

Bisa diamati dengan definisi tersebut didapatkan ruang keadaan dari proses stokastik $\{X_n, n \geq 0\}$ adalah $S = \{1, 2, 3\}$. Karena data yang didapatkan mulai dari 01 Januari 2019, maka pada tugas akhir ini tanggal tersebut dijadikan sebagai waktu inisial ($n = 1$) dari proses stokastik $\{X_n, n \geq 0\}$. Sehingga sekarang dipunyai nilai-nilai dari $\{X_1, X_2, \dots, X_{1795}\}$.

Matriks Probabilitas Transisi

Matriks probabilitas transisi diperoleh berdasarkan transisi dari setiap keadaan pada rantai Markov $\{X_n, n \geq 0\}$. Pada tabel 2 disajikan frekuensi transisi dari keadaan i ke keadaan j . Dihitung frekuensi transisi dari $i = 1$ ke $j = 1,2,3$, lalu frekuensi transisi dari $i = 2$ ke $j = 1,2,3$, dan transisi dari $i = 3$ ke $j = 1,2,3$.

Tabel 2. Frekuensi Transisi dari Setiap Keadaan

Keadaan i	Keadaan j	Frekuensi Transisi Keadaan i ke j
1 = baik	1 = baik	561
	2 = sedang	199
	3 = tidak sehat	1
2 = sedang	1 = baik	198
	2 = sedang	828
	3 = tidak sehat	3
3 = tidak sehat	1 = baik	1
	2 = sedang	3
	3 = tidak sehat	0

Dari frekuensi transisi tersebut dapat dihitung probabilitas transisi dengan mengikuti persamaan

$$p_{i,j} = \text{peluang transisi dari keadaan } i \text{ ke keadaan } j \\ = \frac{\text{frekuensi transisi dari keadaan } i \text{ ke keadaan } j}{\text{penjumlahan frekuensi transisi dari keadaan } i \text{ untuk } 1,2,3}$$

Untuk itu, berikut pada Tabel 3 diberikan data penjumlahan frekuensi pada keadaan i .

Tabel 3. Penjumlahan Frekuensi Transisi dari Keadaan i untuk $k = 1,2,3$

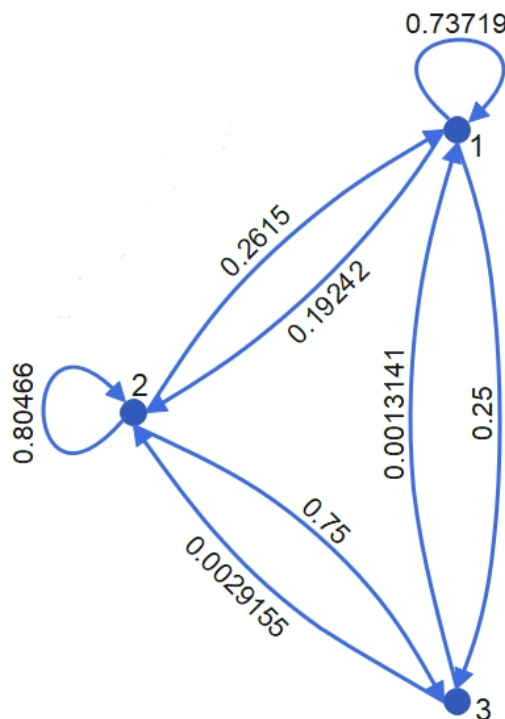
Keadaan i	Jumlah
1 = baik	$561+199+1 = 761$
2 = sedang	$198+828+3 = 1029$
3 = tidak sehat	$1+3+0 = 4$

Lalu dihitung matriks probabilitas transisi $P = [p_{i,j}]$ sebagai berikut

$$P = \begin{bmatrix} 561/761 & 199/761 & 1/761 \\ 198/1029 & 828/1029 & 3/1029 \\ 1/4 & 3/4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,7372 & 0,2615 & 0,0013 \\ 0,1924 & 0,8047 & 0,0029 \\ 0,25 & 0,75 & 0 \end{bmatrix}.$$

Probabilitas transisi $p_{i,j}$ yang bernilai positif menunjukkan adanya kemungkinan transisi dari keadaan i ke keadaan j . Sementara pada $p_{3,3} = 0$ berarti tidak ada kemungkinan transisi dari keadaan 3 ke dirinya sendiri dalam satu langkah. Masing-masing baris pada matriks P memiliki jumlah sama dengan satu. Matriks P di atas dapat divisualisasikan menggunakan *graph* dengan 3 *node*. Setiap *node* memiliki busur berarah yang menunjukkan adanya transisi dari *node* tersebut. Nilai probabilitas $p_{i,j}$ dinyatakan pada setiap busur berarah. Berikut diberikan *graph* untuk matriks P di atas:



Gambar 1 Graph Berarah Matriks Probabilitas Transisi P

Dari matriks probabilitas transisi P dan *graph* berarah pada Gambar 1 dapat diketahui klasifikasi rantai Markov. Sifat *irreducible* atau *reducible* memastikan bahwa adanya kemungkinan setiap keadaan bertransisi ke keadaan yang lain dalam 1 langkah atau lebih. Berikut dilakukan perhitungan untuk melihat terpenuhinya sifat *irreducible*:

Tabel 4. Transisi dari Keadaan i ke Keadaan 1, 2, dan 3

Transisi dari Keadaan i ke Keadaan 1, 2, dan 3	
$P(X_1 = 1 X_0 = i) = 0,7372 > 0$	
$P(X_1 = 2 X_0 = i) = 0,2615 > 0$	
$P(X_1 = 3 X_0 = i) = 0,0013 > 0$	
$P(X_1 = 1 X_0 = i) = 0,1924 > 0$	
$P(X_1 = 2 X_0 = i) = 0,8047 > 0$	
$P(X_1 = 3 X_0 = i) = 0,0029 > 0$	
$P(X_1 = 1 X_0 = i) = 0,25 > 0$	
$P(X_1 = 2 X_0 = i) = 0,75 > 0$	
$P(X_2 = 3 X_0 = i) = 0,0022 > 0$	

Persamaan pada Tabel 4 menunjukkan bahwa mungkin untuk mencapai keadaan 1,2, dan 3 dari keadaan 1 hanya dengan satu tahap, ini bisa dilihat dari $p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}$ yang bernilai positif. Keadaan 1,2, dan 3 juga mungkin dicapai oleh keadaan 2 hanya dengan satu tahap. Keadaan 3 dapat mencapai keadaan 1 dan 2 untuk satu tahap, sedangkan untuk kembali ke dirinya sendiri bisa dicapai dengan 2 tahap. Dari penjelasan tersebut, bisa disimpulkan bahwa rantai Markov $\{X_n, n \geq 0\}$ bersifat *irreducible*.

Selanjutnya dicari tahu apakah rantai Markov $\{X_n, n \geq 0\}$ bersifat periodik atau aperiodik yang menggambarkan tentang pola transisi suatu keadaan untuk kembali ke dirinya sendiri. Untuk mendapatkan periode d , masing-masing $i = 1,2,3$ akan dicari semua bilangan asli n , sedemikian sehingga ada jalur dengan n langkah yang menghubungkan keadaan i ke dirinya sendiri. Berikut diberikan Tabel 5 untuk mendapatkan n tersebut:

Tabel 5. Jalur Transisi Setiap $i \rightarrow i$

i	n	Jalur
1 = baik	1	$1 \rightarrow 1$
	2	$1 \rightarrow 1 \rightarrow 1$
	\vdots	\vdots
	k	$\underbrace{1 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow 1}_{k \text{ langkah}}$
2 = sedang	1	$2 \rightarrow 2$
	2	$2 \rightarrow 2 \rightarrow 2$
	\vdots	\vdots
	k	$\underbrace{2 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow 2}_{k \text{ langkah}}$
3 = tidak sehat	2	$3 \rightarrow 2 \rightarrow 3$
	3	$3 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow 3$
	4	$3 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow 3$
	\vdots	\vdots
	k	$3 \rightarrow \underbrace{2 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow 2}_{k-2 \text{ langkah}} \rightarrow 3$

Tabel 5 menunjukkan bahwa terdapat jalur dari keadaan 1 ke dirinya sendiri dengan langkah $n = \{1, 2, \dots, k\}$. Terdapat jalur dari keadaan 2 ke dirinya sendiri dengan langkah $n = \{1, 2, \dots, k\}$. Lalu terdapat jalur dari keadaan 3 ke dirinya sendiri dengan langkah $n = \{2, 3, 4, \dots, k\}$. Jalur transisi pada keadaan 1 dan 2 dapat melewati dirinya sendiri dikarenakan nilai $p_{1,1}$ dan $p_{2,2}$ bernilai positif yang artinya terdapat transisi ke dirinya sendiri dalam 1 langkah. Sementara jalur transisi pada keadaan 3 melewati keadaan 2 dikarenakan $p_{3,3}$ bernilai nol yang artinya tidak ada transisi ke dirinya sendiri dalam satu langkah. Sehingga pada keadaan 3 dicari n langkah melalui keadaan yang lain agar dapat menjangkau dirinya sendiri. Pada Tabel 5 menggunakan jalur yang melalui keadaan 2.

Kemudian dari hasil semua n yang diperoleh, dicari semua pembagi yang mungkin dari n dan didapatkan d yang merupakan nilai terbesar dari pembagi tersebut. Nilai d ini adalah periode dari rantai Markov $\{X_n, n \geq 0\}$ dimana rantai dengan $d > 1$ bersifat periodik dan $d = 1$ rantai bersifat aperiodik. Dari tabel di atas didapatkan periode $d = 1$ sehingga rantai Markov $\{X_n, n \geq 0\}$ bersifat aperiodik.

Waktu Okupansi

Pada penelitian ini dihitung waktu okupansi untuk rentang waktu $\{0, 1, \dots, 30\}$. Perhitungan waktu okupansi menggunakan cara menjumlahkan seluruh matriks P yang dipangkatkan dari nol hingga 30. Berikut perhitungan waktu okupansi

$$\begin{aligned}
 M(30) &= \sum_{r=0}^{30} P^r \\
 M(30) &= P^0 + P^1 + P^2 + \dots + P^{30} \\
 M(30) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,7372 & 0,2615 & 0,0013 \\ 0,1924 & 0,8047 & 0,0029 \\ 0,25 & 0,75 & 0 \end{bmatrix} + \dots \\
 &\quad + \begin{bmatrix} 0,4230 & 0,5748 & 0,0022 \\ 0,4230 & 0,5748 & 0,0022 \\ 0,4230 & 0,5748 & 0,0022 \end{bmatrix} \\
 M(30) &= \begin{bmatrix} 13,379 & 16,5561 & 0,0649 \\ 12,1828 & 17,7488 & 0,0684 \\ 12,3089 & 17,6258 & 0,0653 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Matriks $M(30)$ di atas merupakan perpindahan kategori kualitas udara di Kota Surabaya jika diamati pada hari ke nol hingga 30. Pada $m_{1,1}(30)$ menunjukkan bahwa kualitas udara Kota Surabaya pada hari ke nol hingga 30 memiliki rata-rata kategori ISPU baik sejumlah 13,8020 hari jika kategori ISPU pada hari ke nol adalah baik. Pada $m_{1,2}(30)$ menunjukkan bahwa rata-rata

kategori ISPU sedang berjumlah 17,1309 hari pada hari ke nol hingga 30 jika kategori ISPU pada hari ke nol adalah baik. Begitu pula berlaku bagi elemen matriks lainnya.

Limiting Behavior

Limiting behavior berkaitan dengan distribusi limit, distribusi stasioner, dan distribusi okupansi yang digunakan untuk mengetahui distribusi probabilitas dalam jangka waktu yang panjang. Pada penjelasan di atas didapatkan kesimpulan bahwa rantai Markov $\{X_n, n \geq 0\}$ bersifat *irreducible* dan aperiodik sehingga menurut [5] distribusi limit pada penelitian ini ada dan tunggal. Karena distribusi limit ada, distribusi stasioner bernilai sama dengan distribusi limit [5]. Lalu rantai Markov $\{X_n, n \geq 0\}$ juga memiliki distribusi okupansi dan distribusi stasioner yang tunggal dan bernilai sama. Sehingga rantai Markov $\{X_n, n \geq 0\}$ dengan sifat *irreducible* dan aperiodik ini nilai distribusi limit, distribusi stasioner, dan distribusi okupansinya ada dan tunggal serta bernilai sama.

Misal $\zeta = [\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3]^T$ merupakan distribusi limit, distribusi stasioner, dan distribusi okupansi. Berdasarkan Teorema 2.6 pada [5], karena ζ merupakan distribusi stasioner maka memenuhi persamaan kesetimbangan

$$-0,2628\zeta_1 + 0,1924\zeta_2 + 0,25\zeta_3 = 0, \quad (1)$$

$$0,2615\zeta_1 - 0,1953\zeta_2 + 0,75\zeta_3 = 0, \quad (2)$$

$$0,0013\zeta_1 + 0,0029\zeta_2 - \zeta_3 = 0 \quad (3)$$

dan persamaan penormalan

$$\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 1.$$

Lalu dicari solusi dari keempat persamaan tersebut, yaitu $\zeta_1, \zeta_2,$ dan ζ_3 dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan. Didapatkan hasil:

$$\zeta_1 = 0,4230,$$

$$\zeta_2 = 0,5748,$$

$$\zeta_3 = 0,0022.$$

Berdasarkan perhitungan di atas maka distribusi stasioner, distribusi limit, dan distribusi okupansi pada rantai Markov $\{X_n, n \geq 0\}$ ini bernilai sama dan dinotasikan sebagai ζ . Distribusi tersebut adalah

$$\zeta = [0,4230 \ 0,5748 \ 0,0022].$$

Distribusi ζ sebagai distribusi limit menunjukkan distribusi probabilitas setiap keadaan setelah langkah transisi yang besar. Distribusi ini dapat digunakan untuk melihat bagaimana kemungkinan kualitas udara yang akan terjadi di masa mendatang. Rantai Markov $\{X_n, n \geq 0\}$ dengan distribusi limit ζ menunjukkan bahwa di masa yang akan datang probabilitas ISPU Kota

Surabaya berkategori baik akan terjadi sebesar 42,3%, probabilitas ISPU sedang akan terjadi sebesar 57,5%, dan probabilitas ISPU tidak sehat akan terjadi sebesar 0,2%. Hal ini berarti kualitas udara di Kota Surabaya akan berkisar pada kategori baik dan sedang, sementara kategori tidak sehat kemungkinan terjadi sangat kecil.

Distribusi ζ sebagai distribusi stasioner menunjukkan rantai Markov $\{X_n, n \geq 0\}$ mencapai kondisi setimbang yang artinya distribusi probabilitas dari rantai Markov $\{X_n, n \geq 0\}$ tidak berubah seiring waktu. Distribusi ini memberikan proporsi waktu setiap keadaan bernilai konstan dalam jangka panjang. Diperkirakan kualitas udara Kota Surabaya akan berada dalam kategori ISPU baik sekitar 775 hari, berada dalam kategori ISPU sedang sekitar 1016 hari, dan berada dalam kategori ISPU tidak sehat sekitar 4 hari.

Distribusi ζ sebagai distribusi okupansi memberikan informasi mengenai proporsi waktu setiap keadaan selama waktu pengamatan $\{0, 1, \dots, 1795\}$. Informasi tersebut memberikan gambaran praktis mengenai berapa hari Kota Surabaya berada dalam kategori ISPU baik, sedang, dan tidak sehat. Dapat dilihat distribusi okupansi ζ dengan waktu pengamatan 1 Januari 2019-30 November 2023, Kota Surabaya berada dalam kategori ISPU baik selama 775 hari, kategori ISPU sedang selama 1016 hari, dan kategori ISPU tidak sehat selama 4 hari.

Nilai Prediksi dan Evaluasi Parameter

Pada bagian ini dilakukan prediksi kategori ISPU untuk beberapa waktu yang datang dan dibandingkan dengan data uji untuk mengetahui tingkat akurasi hasil prediksi. Data uji adalah kategori ISPU pada 1-31 Desember 2023 yang berjumlah 31 data. Perhitungan prediksi melibatkan distribusi inisial yaitu probabilitas saat keadaan awal $n = 0$ yaitu pada 1 Januari 2023 dengan kategori ISPU yang terjadi adalah baik. Berikut distribusi inisial saat $n = 0$:

$$\begin{aligned} a_1 &= P(X_0 = 1) = 1 \\ a_2 &= P(X_0 = 2) = 0 \\ a_3 &= P(X_0 = 3) = 0 \\ a &= [a_1 \ a_2 \ a_3] = [1 \ 0 \ 0]. \end{aligned}$$

Selanjutnya distribusi inisial tersebut dikalikan dengan matriks transisi n -langkah. Hasil prediksi yang diharapkan berupa kategori ISPU, yaitu baik, sedang, dan tidak sehat. Kategori ISPU tersebut didapatkan dari nilai probabilitas tertinggi pada setiap distribusi probabilitas $a^{(n)}$. Berikut contoh perhitungan untuk mendapatkan nilai prediksi 1 Desember 2023:

$$a^{(1)} = a P = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0,7372 & 0,2615 & 0,0013 \\ 0,1924 & 0,8047 & 0,0029 \\ 0,25 & 0,75 & 0 \end{bmatrix}$$

waktu pengamatan 01 Januari 2019-30 November 2023, Kota Surabaya berada dalam kategori ISPU baik selama 775 hari, kategori ISPU sedang selama 1016 hari, dan kategori ISPU tidak sehat selama 4 hari.

5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] “BBC,” *BBC News Indonesia*, 2023. Indonesia Masuk 'Enam Negara Paling Berkontribusi terhadap Polusi Udara Global', Warga Akan Gugat Pemerintah dan Industri. BBC News Indonesia. <https://www.bbc.com/indonesia/articles/c72enp76622o>
- [2] R. Mediakom, “Polusi Ancam Saluran Pernapasan,” *Biro Komunikasi & Pelayanan Publik Kemenkes RI*, 2024.
<https://sehatnegeriku.kemkes.go.id/baca/blog/20240108/5644635/polusi-ancam-saluran-pernapasan/>
- [3] KLHK, “Permen LHK Nomor 14 Tahun 2020 Tentang Indeks Standar Pencemar Udara,” *Permen LHK Nomor 14 Tahun 2020 Tentang Indeks Standar Pencemar Udar.*, pp. 1–16, 2020.
- [4] D. M. Riefkie Errijanto , Desi Mustiyorini,, “IKPLHD KOTA SURABAYA 2020 FINAL.pdf.” p. 2318, 2020.
- [5] A. Y. Kebriya & M. Nadi, “Examining Air Pollution Continuity in Tehran Province using Markov Chain Model”, *Iranica Journal of Energy and Environment*, vol. 15, no. 2, pp. 201–210, 2024, <https://doi.org/10.5829/ijee.2024.15.02.10>.
- [6] Suhartono, & H. Prabowo, “Peramalan Kualitas Udara Di Kota Surabaya Untuk Menentukan Kategori Indeks Standar Pencemar Udara”, Tesis, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, 2019.
- [7] N. Koesoemaningroem, E. Endroyono, & S. M. S. Nugroho, "Peramalan Pencemaran Udara Di Kota Surabaya Menggunakan Metode DSARIMA dengan Pendekatan Percentile Error Bootstrap (PEB)", *Jurnal Teknologi Informasi Dan Ilmu Komputer*, vol. 8, no. 5, pp. 987-994, 2021, <https://doi.org/10.25126/jtiik.2021855216>
- [8] M. Tettey, F. T. Oduro, D. Adedia, & D.A. Abaye, “Markov chain analysis of the rainfall patterns of five geographical locations in the south eastern coast of Ghana”. *Earth Perspectives*, vol. 4, no. 1, pp. 1-11, 2017, <https://doi.org/10.1186/s40322-017-0042-6>.
- [9] N. N. Zakaria *et al.*, “Markov Chain Model Development for Forecasting Air Pollution Index of Miri, Sarawak,” *Int. J. Eng. Adv. Technol.*, vol. 8, no. 19, pp. 1–11, 2019, doi: 10.35940/ijeat.F1116.0986S319.



-----Vol 12(2), Oktober 2024, Halaman 121 - 134-----

- [10] V. G. Kulkarni, "Introduction to Modeling and Analysis of Stochastic Systems", London, Springer, 2011, doi: 10.1016/j.peva.2007.06.006.